Lösungen zur Übung zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1 Überprüfen Sie, ob sich die folgenden Geraden / Ebenen schneiden. Falls ja, geben Sie den Schnittpunkt bzw. die Schnittgerade an.

a) $\vec{g_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \vec{g_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$ Es gibt keinen Schnittpunkt.

b) $\vec{g_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \vec{g_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$ Schnittpunkt ist $\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$

c) $E:\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18; \quad \vec{g} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$ Es gibt keinen Schnittpunkt.

d) $E_1:\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1; \quad E_2:\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \quad \Rightarrow$ Schnittgerade ist $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

Aufgabe 6.2 Liegen die Punkte (1|3|-6) und (5|-5|4) auf folgender Ebene?

$$E: \quad 2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

Einsetzen in die Ebenengleichung liefert für den ersten Punkt $11 = 1$ und für den zweiten $1 = 1$. Damit liegt der erste Punkt nicht auf der Ebene, der zweite schon.

Aufgabe 6.3 Gegeben Sei die Ellipse $2x^2 + 5y^2 - 20x + 49 = 0$ in der x/y-Ebene. Schneidet sie folgende Ebenen und wenn ja, in welchen Punkten?

Für beide Aufgaben ist es ratsam, die Ebenen zunächst mit der x/y-Ebene ($z = 0$) zu schneiden, da nur dort ein Schnittpunkt vorliegen kann. Dies vereinfacht die Gleichung. Anschließend setzt man das Ergebnis in die Gleichung für die Ellipse ein und berechnet die Schnittpunkte.

a) $\vec{E} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$

$\vec{E}_{xy} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$

$(5-\lambda)^2 = -\frac{71}{5} \quad \Rightarrow$ Es gibt keinen Schnittpunkt.

b) $E: \quad x + 2z = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 5 \quad \Rightarrow$

$y = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow$ Schnittpunkte sind: $\begin{bmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}$

Aufgabe 6.4 Wiederholung: Gegeben Sei das skalare Potential der Erdanziehungskraft: $\Phi(r) = -G\frac{M_{Erde}}{r}$.

a) Berechnen Sie die ersten beiden Taylorpolynome an der Stelle $r = r_e$, dem Radius der Erde.

$$\Phi(r) \approx -G\frac{M_{Erde}}{r_e} + G\frac{M_{Erde}}{r_e^2} - 2G\frac{M_{Erde}}{r_e^3}$$

b) Ersetzen Sie jetzt $(r - r_e)$ durch z und $G\frac{M_{Erde}}{{r_e}^2}$ durch g. Außerdem können Sie die Konstante weg lassen, da ein Potential immer eine frei wählbare Konstante hat. Wenn Sie richtig gerechnet haben, erhalten Sie folgende Näherungsformel für das Gravitationspotential in der Nähe der Erdoberfläche:

$$\Phi \approx gz - \frac{g}{r_e} z^2$$

c) Berechnen Sie hieraus die wirkende Beschleunigung $\vec{a} = -\mathrm{grad}(\Phi) = -\vec{\nabla}\Phi = -g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - 2\frac{z}{r_e} \end{bmatrix}$.

d) Zeigen Sie explizit, dass das Kraftfeld Wirbelfrei ist, d.h. $\mathrm{rot}(\vec{a}) = \vec{\nabla} \times \vec{a} = -g \begin{bmatrix} \frac{d}{dy}\left(1 - 2\frac{z}{r_e}\right) - 0 \\ 0 - \frac{d}{dx}\left(1 - 2\frac{z}{r_e}\right) \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$.