Lösungsblatt 13
zur Experimentalphysik I

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 13

Letzte Hinweise zur Klausur: Die Klausur ist am Donnerstag, dem 31. Juli von 15:30 bis ca. 18:00 Uhr in S2 06|030 (In dem Hörsaal der Vorlesung). Thema ist der Stoff aus der Vorlesung und den Übungen. Erlaubte Hilfsmittel sind ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt als Formelsammlung sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner. Bitte bringen Sie daneben auch ausreichend Stifte und Schreibpapier (mindestens 8 Blatt, da Sie jede Aufgabe auf einem separatem Blatt abgeben müssen) und einen Lichtbildausweis mit.
Unsere Tutoren haben vor der Klausur noch Sondersprechstunden eingerichtet. Die Sprechstunden von Alexander Bruns sind am Mittwoch 23.07 ab 15:00 und Montag 28.07 ab 13:00 jeweils im LZP. Die Sprechstunden von Martin Baumann sind wie gehabt Donnerstags um 13:00 in S2 14|420. Sprechstunden mit Daniel Kiefer und Maximilian Schilder können Sie per E-Mail vereinbaren.
Ansonsten wünsche ich Ihnen viel Erfolg bei der Vorbereitung.

Hinweis: Da am 21.07. und 22.07. **keine** Übungen mehr stattfinden, gibt es in diesem Blatt keine Hausaufgaben. Sie werden in der Präsenzübung nicht alle Aufgaben schaffen. Lösen Sie die restlichen Aufgaben trotzdem zu Hause und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der Musterlösung, denn der Stoff dieses Blattes ist noch Klausurrelevant. Falls Sie danach noch Fragen haben, nutzen Sie die Sprechstunden.

Aufgabe 13.1 Neuer Sauerstoff (Präsenzaufgabe)

Hubert lässt eine bis auf Atmosphärendruck (1013 hPa) entleerte Sauerstoffflasche mit einem Innenvolumen von $V_i = 40$ l bei einer Temperatur von 18°C isotherm neu befüllen. Die Füllung ist ein ideales Gas und würde bei Atmosphärendruck 6 m^3 einnehmen.

a) Welcher Druck herrscht in der Flasche nach der Befüllung?

$$p_1 V_1 = N k_B T = p_2 V_2 \quad \Leftrightarrow \quad p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = 1013 \text{ hPa} \cdot \frac{6000 \text{ l}}{40 \text{ l}} = 151{,}95 \text{ Bar}$$

b) Welche mechanische Arbeit muss die Firma zur Befüllung aufwenden?

$$\mathrm{d}E = -p\mathrm{d}V = -\frac{Nk_BT}{V}\mathrm{d}V \quad \Leftrightarrow \quad \int \mathrm{d}E = -\int \frac{Nk_BT}{V}\mathrm{d}V \quad \Leftrightarrow$$
$$E_2 - E_1 = -Nk_BT\left(\ln(V_2) - \ln(V_1)\right) = p_1V_1\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta E = 101300 \,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 6 \text{ m}^3 \cdot \ln\left(\frac{6000 \text{ l}}{40 \text{ l}}\right) = 3{,}045 \text{ MJ}$$

c) Um wie viel nimmt die Masse der Flasche dabei zu?

$$M = N \cdot m = \frac{p_1(v_1 - V_2)}{k_BT} = \frac{101300 \,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 5{,}96 \text{ m}^3 \cdot 0{,}032 \,\frac{\text{kg}}{\text{mol}}}{1{,}381 \cdot 10^{-23} \,\frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 291{,}15 \text{ K}} = 0{,}497 \cdot 10^{26} \cdot 0{,}032 \,\frac{\text{kg}}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 7{,}958 \text{ kg}$$

d) Welches ist die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der O_2-Moleküle in der Flasche?

$$v_{ml} = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}381 \cdot 10^{-23} \,\frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 291{,}15 \text{ K}}{0{,}032 \,\frac{\text{kg}}{6{,}02 \cdot 10^{23}}}} = 388{,}9 \,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e) Welcher Druck herrscht in der Flasche, wenn man den Sauerstoff als reales Gas betrachtet? Welcher Anteil entfällt auf das Eigenvolumen?
$a = 0{,}1378 \,\frac{\text{Pa m}^6}{\text{mol}^2}$; $\quad b = 3{,}18 \cdot 10^{-5} \,\frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$

$$\left(p + a\frac{N^2}{V^2}\right)(V - bN) = Nk_BT \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{Nk_BT}{V - bN} - a\frac{N^2}{V^2} = \frac{p_1V_1}{V - b\frac{p_1V_1}{k_BT}} - a\left(\frac{V_1}{V} \cdot \frac{p_1}{k_BT}\right)^2 = \frac{p_1}{\frac{V}{V_1} - b\frac{p_1}{k_BT}} - a\left(\frac{V_1}{V} \cdot \frac{p_1}{k_BT}\right)^2$$
$$= \frac{101300 \text{ Pa}}{\frac{40 \text{ l}}{6000 \text{ l}} - 3{,}18 \cdot 10^{-5} \,\frac{\text{m}^3}{6{,}02 \cdot 10^{23}} \,\frac{101300 \text{ Pa}}{1{,}381 \cdot 10^{-23} \,\frac{\text{J}}{\text{K}} 291{,}15 \text{ K}}} - 0{,}1378 \,\frac{\text{Pa m}^6}{(6{,}02 \cdot 10^{23})^2}\left(\frac{6000 \text{ l}}{40 \text{ l}} \cdot \frac{101300 \text{ Pa}}{1{,}381 \cdot 10^{-23} \,\frac{\text{J}}{\text{K}} 291{,}15 \text{ K}}\right)^2 = 135{,}2 \text{ Bar}$$

Übungsblatt 13 zur Experimentalphysik I

Name, Vorname: ______________________ Matrikelnummer: ⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴

Aufgabe 13.2 Wasserdampf (Präsenzaufgabe)

Welches Volumen nimmt 1 Liter Wasser unter Normaldruck nach dem Verdampfen ein?

$$V = \frac{Nk_bT}{p} = \frac{Mk_bT}{mp} = \frac{1\ \text{kg} \cdot 1{,}381 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 373{,}15\ \text{K}}{,018\ \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \cdot 101\,300\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 1{,}700\ \text{m}^3$$

Aufgabe 13.3 Eine Ballonfahrt, die ist Lustig (Präsenzaufgabe)

Max und Moritz' Taube Fridolin hat Flugangst und kann deswegen nicht alleine Fliegen. Damit Fridolin die Welt trotzdem von oben sehen kann haben Max und Moritz einen gelben quaderförmigen Ballon mit den Maßen 6 x 5 x 6 m^3 gebaut und wollen damit abheben. Die Temperatur beträgt 300 K und der Druck dank schönem Wetter 1030 mbar.

a) Wie viele mole und wie viele kg Luft befinden sich in dem Ballon? Nehmen Sie an, dass Luft zu 78% aus Stickstoff ($m = 14{,}01$ u), zu 21% aus Sauerstoff ($m = 16$ u) und zu 1% aus Argon ($m = 39{,}95$ u) besteht.

$$N = \frac{pV}{k_BT} = \frac{103\,000\ \text{Pa} \cdot 180\ \text{m}^3}{1{,}381 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 300\ \text{K}} = 4{,}475 \cdot 10^{27} = 7434\ \text{mol}$$

$$m_{\text{Luft}} = \overline{m} = x_{N_2}m_{N_2} + x_{O_2}m_{O_2} + x_{Ar}m_{Ar} = 2x_{N_2}m_N + 2x_{O_2}m_O + x_{Ar}m_{Ar} = 2 \cdot 78\% \cdot 14{,}01\ \text{u} + 2 \cdot 21\% \cdot 16{,}001\ \text{u} + 1\% \cdot 39{,}951\ \text{u} = 28{,}98\ \text{u}$$

$$M = \overline{m}N = 28{,}98\ \frac{\text{g}}{\text{mol}} \cdot 7434\ \text{mol} = 215{,}4\ \text{kg}$$

b) Kann der Ballon abheben, wenn Max und Moritz die Innentemperatur des Ballons mit ihrem umgebauten Grill um 50°C erhöhen können? Veranschlagen Sie für das Gewicht von Max, Moritz, Fridolin und dem Ballon 150 kg, sowie 3 kg für den Grill und 17 kg für den Brennstoff "1 A Paraffin Grillanzünder".

$$\Delta M = \overline{m} \cdot \Delta N = \overline{m} \cdot \frac{pV}{k_B}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = \overline{m} \cdot T_1N_1\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = M\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = 215{,}4\ \text{kg}\left(1 - \frac{300\ \text{K}}{350\ \text{K}}\right) = 30{,}78\ \text{kg}$$

So sehr Max und Moritz auch wedeln. Der Auftrieb reicht nicht und der Ballon bleibt am Boden.

c) Wie viel darf der Ballon mit Antrieb, Max und Moritz wiegen, wenn Max und Moritz den Ballon nicht erhitzen und stattdessen komplett mit Wasserstoff füllen?

$$\Delta M = N\left(\overline{m} - m_{H_2}\right) = 7434\ \text{mol} \cdot \left(28{,}98\ \frac{\text{g}}{\text{mol}} - 1{,}01\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}\right) = 200{,}4\ \text{kg}$$

Der Ballon hebt sogar, dann noch ab, wenn Max und Moritz ihre komplette Grillausrüstung mitnehmen.

d) Mit welchen Gasen könnten Max und Moritz ihren Ballon ebenfalls füllen und wie viel kann er dann tragen? Mit welchen Gasen kann der Ballon abheben?

Gas	Summenformel	m	ΔM	Bemerkung
Wasserstoff	H_2	2,02 $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$	200,41 kg	Bestes Ballongas, aber brennbar
Helium	He	4,00 $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$	185,69 kg	In der Praxis verwendetes Gas
Methan	CH_4	16,05 $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$	96,12 kg	Brennbar
Ammoniak	H_3N	17,04 $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$	88,76 kg	Ätzend, giftig
Flourwasserstoff	HF	20,01 $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$	66,68 kg	Ätzend, giftig
Neon	Ne	20,18 $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$	65,42 kg	Mäßiges Ballongas
Ethin	C_2H_2	26,04 $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$	21,85 kg	Brennbar
Blausäure	HCN	27,03 $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$	14,50 kg	Sehr giftig
Kohlenmonoxid	CO	28,01 $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$	7,21 kg	Brennbar, giftig
Stickstoff	N_2	28,02 $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$	7,14 kg	Schlechtes Ballongas
Ethen	C_2H_4	28,06 $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$	6,84 kg	Brennbar

Der Ballon hebt mit Wasserstoff und Helium ab. Da Wasserstoff aber ein brennbares Gas ist und der Ballon bei dem kleinsten Funken in die Luft fliegen würde, ist Helium das Gas der Wahl.

Übungsblatt 13 zur Experimentalphysik I

Name, Vorname: ______________________ Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐

Aufgabe 13.4 Kai macht Eistee (Präsenzaufgabe)

Da Kai zu lange an seinen Physikhausaufgaben gerechnet hat, hat er vergessen den Eistee für seine Freunde kalt zu stellen. Er gibt 0,5 kg Eis mit einer Temperatur von -10°C in seine Jumbo Thermoskanne und 3 Liter Tee mit einer Temperatur von 20°C. Welche Temperatur und Phase hat das Gemisch nachdem sich ein thermisches Gleichgewicht eingestellt hat. Da der Tee ungesüßt ist, können Sie ihn in guter Näherung als Wasser betrachten.

1. Phase: Das Eis erwärmt sich

$$T_{1.\,\text{Phase}} = T_{\text{Anfang}} + \Delta T_{\text{Wasser}} = T_{\text{Anfang}} + \frac{\Delta Q_{\text{Wasser}}}{M_{\text{Wasser}} c_{\text{Wasser}}} = T_{\text{Anfang}} - \frac{\Delta Q_{\text{Eis}}}{M_{\text{Wasser}} c_{\text{Wasser}}} = T_{\text{Anfang}} - \Delta T_{\text{Eis}} \frac{M_{\text{Eis}} c_{\text{Eis}}}{M_{\text{Wasser}} c_{\text{Wasser}}} = 20°\text{C} - 10°\text{C} \cdot \frac{0{,}5\,\text{kg} \cdot 2220\,\frac{\text{J}}{\text{kg K}}}{3\,\text{kg} \cdot 4190\,\frac{\text{J}}{\text{kg K}}} = 19{,}12°\text{C}$$

2. Phase: Das Eis schmilzt

$$T_{2.\,\text{Phase}} = T_{1.\,\text{Phase}} - \frac{\Delta Q_{\text{Eis}}}{M_{\text{Wasser}} c_{\text{Wasser}}} = T_{1.\,\text{Phase}} - \frac{M_{\text{Eis}} L_{\text{Eis}}}{M_{\text{Wasser}} c_{\text{Wasser}}} = 19{,}12°\text{C} - \frac{0{,}5\,\text{kg} \cdot 333\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}}{3\,\text{kg} \cdot 4190\,\frac{\text{J}}{\text{kg K}}} = 5{,}871°\text{C}$$

3. Phase: Mischen von Eiswasser und Tee

$$T_{\text{Ende}} = \frac{M_{\text{Wasser}} T_{2.\,\text{Phase}} + M_{\text{Eis}} T_{\text{Eis}}}{M_{\text{Wasser}} + M_{\text{Eis}}} = \frac{3\,\text{kg} \cdot 5{,}871°\text{C} + 0{,}5\,\text{kg} \cdot 0°\text{C}}{3\,\text{kg} + 0{,}5\,\text{kg}} = 5{,}032°\text{C}$$

Aufgabe 13.5 Benjamins Motor (Präsenzaufgabe)

Um mit seinem Fahrrad besser voran zu kommen hat sich Benjamin folgende Wärmekraftmaschine gebaut:

Ein ideales Gas, sagen wir mal Helium, das bei 900 K unter dem Anfangsdruck von 1,2 MPa steht, wird zunächst isotherm von 2 Litern auf 12 Litern expandiert. Im zweiten Schritt wird es isobar auf das Ausgangsvolumen komprimiert und im dritten und letzten Schritt isochor zurück in den Ausgangszustand gebracht.

a) Zeichnen Sie das p-V-Diagramm dieses Prozesses.

Image to be done.

b) Berechnen Sie die in einem Zyklus aus dem Wärmereservoir aufgenommene Wärme und die abgegebene Arbeit.

$$W = -\int p\,\mathrm{d}V = -\int_{V=V_0}^{V_1} \frac{Nk_BT}{V}\,\mathrm{d}V - \int_{V=V_1}^{V_0} p_1\,\mathrm{d}V = -Nk_BT_1\left(\ln(V_1) - \ln(V_0)\right) + (V_1 - V_0)\frac{Nk_BT_1}{V_1} =$$
$$-V_0P_0\left(\ln(\tfrac{V_1}{V_0}) - \tfrac{V_0}{V_1} - 1\right) = -0{,}002\,\text{m}^3 \cdot 1{,}2\,\tfrac{\text{MJ}}{\text{m}^3} \cdot \left(\ln(\tfrac{12\,\text{l}}{2\,\text{l}}) - \tfrac{12\,\text{l}}{2\,\text{l}} - 1\right) = -2300\,\text{J}$$

$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_1 + Q_3$ (In Schritt 2 wird keine Wärme aus den Wärmereservoir entnommen, dafür aber Wärme an das Kältereservoir abgegeben.)

$$Q = \int_{\text{Schritt 1}} p\,\mathrm{d}V + \int c_V\,\mathrm{d}T = \int_{V=V_0}^{V_1} \frac{Nk_BT}{V}\,\mathrm{d}V + \int_{T=T_2}^{T_0} \frac{f}{2}Nk_B\,\mathrm{d}T = Nk_BT_1\ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) + \frac{f}{2}Nk_B\left(T_0 - T_2\right) =$$
$$V_0p_0\left(\ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) + \frac{f}{2}\left(1 - \frac{T_2}{T_0}\right)\right) = V_0p_0\left(\ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) + \frac{f}{2}\left(1 - \frac{V_0}{V_1}\right)\right) = 0{,}002\,\text{m}^3 \cdot 1{,}2\,\frac{\text{MJ}}{\text{m}^3}\left(\ln\left(\frac{12\,\text{l}}{2\,\text{l}}\right) + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{2l}{12l}\right)\right) = 7300\,\text{J}$$

c) Welche Effizienz hat Benjamins Motor? Vergleichen Sie diese mit der Effizienz des Carnot-Prozesses.

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{2300\,\text{J}}{7300\,\text{J}} = 31{,}51\%, \qquad \epsilon = \frac{\eta}{\eta_{\text{Carnot}}} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_2}{T_0}} = \frac{31{,}51\%}{\frac{5}{6}} = 37{,}81\%$$

Der Carnot-Prozess ist fast drei mal so effizient. Benjamins Motor hat also noch Optimierungspotential.

d) Was würde sich ändern, wenn Benjamin statt Helium ($f = 3$) Kohlendioxid ($f = 13$) genommen hätte?

An der abgegebenen Arbeit W ändert sich nichts, da diese durch die Mechanik gegeben ist und nicht von der Anzahl der Freiheitsgrade abhängt. Die aufgenommene Wärme ändert sich jedoch zu:

$Q = V_0 p_0 \left(\ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) + \frac{f}{2}\left(1 - \frac{V_0}{V_1}\right)\right) = 0{,}002\ \mathrm{m}^3 \cdot 1{,}2\ \frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{m}^3}\left(\ln\left(\frac{12\,\mathrm{l}}{2\,\mathrm{l}}\right) + \frac{13}{2}\left(1 - \frac{2l}{12l}\right)\right) = 17\,300\ \mathrm{J}$ und damit sind
$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{2300\ \mathrm{J}}{17300\ \mathrm{J}} = 13{,}29\%, \qquad \epsilon = \frac{\eta}{\eta_{\mathrm{Carnot}}} = \frac{\eta}{1-\frac{T_2}{T_0}} = \frac{13{,}29\%}{\frac{5}{6}} = 15{,}95\%$
Mit Kohlendioxid läuft Benjamins Motor also noch schlechter, abgesehen davon, dass T_2 so niedrig ist, dass das Kohlendioxid gefrieren würde.

Aufgabe 13.6 Barometrische Höhenformel (Präsenzaufgabe)

Leiten Sie die barometrische Höhenformel unter Berücksichtigung des inhomogenen Schwerefelds der Erde (Gravitationsgesetz) her. Setzen Sie dazu an, der Druck in der Höhe h gleich der Schwerkraft pro Fläche ist, welche die Luft darüber aufbaut. Sie dürfen annehmen, dass die Atmosphäre homogen aus Atomen / Molekülen der Masse m besteht und die Temperatur T hat. Die Masse der Luft ist gegenüber der Masse der Erde vernachlässigbar.

Man betrachte eine kleine Luftsäule der Fläche dA und der Höhe dr. Durch den Druck der oberen Luftschichten liegt auf der Luftsäule eine Kraft $\mathrm{d}F = p \cdot \mathrm{d}A$. Unterhalb der Luftsäule wirkt zusätzlich die Schwerkraft der Luftsäule selbst. Diese ist $\mathrm{d}^2F = \mathrm{d}m \cdot a_{\mathrm{Gravitation}} = \rho \mathrm{d}A\mathrm{d}r \cdot G\frac{m_{\mathrm{Erde}}}{r^2} = \mathrm{d}A\mathrm{d}r\frac{p(r)\cdot m_{\mathrm{Molekül}}}{k_B T} G\frac{m_{\mathrm{Erde}}}{r^2}$. Hieraus ergibt sich durch Division durch dA die Differentialgleichung $\mathrm{d}p = \frac{p(r) G \cdot m_{\mathrm{Molekül}} m_{\mathrm{Erde}}}{k_B T r^2}\mathrm{d}r$. Durch Trennung der Variablen erhält man:
$\int G\frac{m_{\mathrm{Erde}}}{r^2}\mathrm{d}r = \int \frac{k_B T}{p m_{\mathrm{Molekül}}}\mathrm{d}p \quad \Leftrightarrow \quad -G\frac{m_{\mathrm{Erde}}}{r} = \frac{k_B T}{m_{\mathrm{Molekül}}}\ln(p) \quad \Leftrightarrow \quad p = e^{-\frac{G m_{\mathrm{erde}} m_{\mathrm{Molekül}}}{k_B T r}} \cdot C$
Mit der Bedingung, dass auf der Erdoberfläche (r_0) Normaldruck (p_0) herrscht erhält man $p(r_0) = p_0 \Rightarrow C = p_0 e^{\frac{G m_{\mathrm{erde}} m_{\mathrm{Molekül}}}{k_B T r}} \quad \Rightarrow \quad p(r) = p_0 e^{G\frac{m_{\mathrm{erde}} m_{\mathrm{Molekül}}}{k_B T}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)}$

a) Welcher Druck herrscht im unendlichen? Was bedeutet es, dass dieser nicht 0 ist?

$P(\infty) = P_0 e^{G\frac{m_{\mathrm{erde}} m_{\mathrm{Molekül}}}{k_B T}\left(\frac{1}{r_0} - 0\right)} = P_0 e^{G\frac{m_{\mathrm{erde}} m_{\mathrm{Molekül}}}{k_B T r_0}} > 0$
Das bedeutet, dass die Erde ständig Gas verliert, wenn der Weltraum leer ist.

b) Berechnen Sie den Druck im unendlichen konkret mit folgenden Werten:
$G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad m_{\mathrm{erde}} = 5{,}974 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg} \quad k_B = 1{,}381 \cdot 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \quad T = 300\ \mathrm{K} \quad r_{\mathrm{Erde}} = 6{,}367 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$

$$P(\infty) = 1013\ \mathrm{hPa}\cdot\exp\left(6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2} \cdot \frac{5{,}974\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}\cdot 0{,}02802\cdot\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}}{1{,}381\cdot 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\cdot 300\ \mathrm{K}\cdot 6\,367\,000\ \mathrm{m}}\right) = 1013\ \mathrm{hPa}\cdot e^{-703\cdot,5} = 2{,}972\cdot 10^{-301}\ \mathrm{hPa}$$

Aufgabe 13.7 Föhn (Präsenzaufgabe)

Der Wind weht 20°C warme mit Wasser gesättigte Luft über einen Berg. Dabei kühlt sie sich auf 13° ab. Das überschüssige Wasser regnet über dem Berg ab. Auf der Rückseite des Berges weht die Luft wieder ins Tal hinab und erwärmt sich dabei wieder adiabatisch. Der Druck im Tal beträgt 1000 hPa. Nehmen Sie Luft als ideales Gas mit 7 Freiheitsgraden an.

a) Der Sättigungsdampfdruck des Wassers ist gegeben durch $p(T) = a \cdot e^{bT}$. Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b aus dem Siedepunkt ($p(100°\mathrm{C}) = 1013$ hPa) und dem Tripelpunkt ($p(0{,}01°\mathrm{C}) = 6{,}12$ hPa) des Wassers. Wie viel Wasser passt bei 20°C in einen Kubikmeter?

$p = ae^{bT} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{ae^{bT_1}}{ae^{bT_2}} = e^{b(T_1 - T_2)} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{T_1 - T_2} = \frac{\ln\left(\frac{1013\ \mathrm{hPa}}{6{,}12\ \mathrm{hPa}}\right)}{100°\mathrm{C} - 0{,}01°\mathrm{C}} = 0{,}05110\ \frac{1}{\mathrm{K}}$
$a = pe^{-bT} = 6{,}12\ \mathrm{hPa} \cdot e^{-0{,}0511\ \frac{1}{\mathrm{K}}\cdot 213{,}16\ \mathrm{K}} = 5{,}310 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{hPa}$
$M_{\mathrm{Tal}} = N \cdot m_{\mathrm{Molekül}} = \frac{pV}{k_B T}\cdot m_{\mathrm{Molekül}} = ae^{bT}\cdot\frac{V m_{\mathrm{Molekül}}}{k_B T} = 5{,}31 \cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot e^{0{,}05110\ \frac{1}{\mathrm{K}}\cdot 293{,}15\ \mathrm{K}} \cdot \frac{1\ \mathrm{m}^3\cdot 18{,}02\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}}{1{,}381\cdot 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\cdot 293{,}15\ \mathrm{K}} =$
12,58 g

b) Wie viel Wasser ist es auf dem Berg? Die Tatsache, dass sich die Luft beim Aufstieg ausdehnt dürfen Sie für diesen Teil der Aufgabe vernachlässigen. Wie viel latente Wärme wird bei dem Prozess frei?

$$M_{\text{Berg}} = ae^{bT} \cdot \frac{Vm_{\text{Molekül}}}{k_B T} = 5{,}31 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot e^{0{,}05110\ \frac{1}{\text{K}} \cdot 286{,}15\ \text{K}} \cdot \frac{1\ \text{m}^3 \cdot 18{,}02\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}}{1{,}381 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 286{,}15\ \text{K}} = 9{,}042\ \text{g}$$

$$Q = \Delta M \cdot L = 3{,}538\ \text{g} \cdot 2256\ \frac{\text{J}}{\text{g}} = 7981\ \text{J}$$

c) Wie warm ist die Luft wenn sie wieder im Tal ankommt und welche relative Feuchte hat sie?

$$\Delta T = \frac{Q}{c_V} = \frac{Q}{\frac{f}{2} k_B N} = \frac{2}{f} \cdot \frac{QT_0}{p_0 V_0} = \frac{2}{7} \cdot \frac{7981\ \text{J} \cdot 293{,}15\ \text{K}}{10^5\ \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \cdot 1\ \text{m}^3} = 6{,}68°\text{C} \quad \Rightarrow \quad T = 20°\text{C} + 6{,}68°\text{C} = 26{,}68°\text{C}$$

$$H_{\text{rel}} = \frac{M_{\text{Tatsächlich}}}{M_{\text{Potentiell}}} = \frac{ae^{bT_{\text{Berg}}} \cdot \frac{Vm_{\text{Molekül}}}{k_B T_{\text{Berg}}}}{ae^{bT_{\text{Tal}}} \cdot \frac{Vm_{\text{Molekül}}}{k_B T_{\text{Tal}}}} = \frac{T_{\text{Tal}}}{T_{\text{Berg}}} \cdot e^{b\left(T_{\text{Berg}} - T_{\text{Tal}}\right)} = \frac{299{,}83\ \text{K}}{286{,}15\ \text{K}} \cdot e^{0{,}0511\ \frac{1}{\text{K}} \cdot (13°\text{C} - 26{,}68°\text{C})} = 52{,}08\%$$

d) Berechnen Sie den Luftdruck auf dem Berg und schließen Sie mit der barometrischen Höhenformel aus Aufgabe 13.6 auf die Höhe des Berges.

$$pV^\kappa = pV^{1+\frac{2}{f}} = pV^{\frac{9}{7}} = p\left(\frac{Nk_B T}{p}\right)^{\frac{9}{7}} = p^{-\frac{2}{7}}\left(Nk_B T\right)^{\frac{9}{7}} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \frac{{T_1}^9}{{p_1}^2} = \frac{{T_2}^9}{{p_2}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{9}{2}} \quad \Leftrightarrow$$

$$p_2 = p_1 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{9}{2}} = 1000\ \text{hPa} \cdot \left(\frac{286{,}15\ \text{K}}{299{,}83\ \text{K}}\right)^{\frac{9}{2}} = 810{,}5\ \text{hPa}$$

$$p = p_0 e^{G\frac{m_{\text{erde}} m_{\text{Molekül}}}{k_B T}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{Gm_{\text{erde}} m_{\text{Molekül}}}{k_B T}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k_B T}{Gm_{\text{erde}} m_{\text{Molekül}}} \cdot \frac{9}{2} \ln\left(\frac{T_{\text{Tal}}}{T_{\text{Berg}}}\right) = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}$$

$$h = r - r_0 = r_0 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{9}{2}\frac{k_B T r_0}{Gm_{\text{erde}} m_{\text{Molekül}}} \ln\left(\frac{T_{\text{Tal}}}{T_{\text{Berg}}}\right)} - 1\right) = 6367\ \text{km} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{9}{2}\frac{1{,}381 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 293{,}15\ \text{K} \cdot 6\,367\,000\ \text{m}}{6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 5{,}974 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 0{,}02898\ \frac{\text{kg}}{\text{mol}}} \ln\left(\frac{299{,}13\ \text{K}}{286{,}15\ \text{K}}\right)} - 1\right)$$

$$= 6367\ \text{km} \cdot 2{,}682 \cdot 10^{-4} = 1707\ \text{m}$$

Hier müsste man in die Formel eigentlich ein $T(h)$ einsetzen, bzw. die barometrische Höhenformel für eine adiabatische Atmosphäre neu herleiten. Dies sprengt aber den Rahmen der Aufgabe, daher ist es in Ordnung T als konstant zu nähern.