Lösungsblatt 7
zur Experimentalphysik I

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1 Hagelschaden (Präsenzaufgabe)

a) Ein Auto steht im Regen. Pro Sekunde treffen 60 g Regentropfen mit einer Geschwindigkeit von $v = 15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf das Autodach auf. Berechnen sie die mittlere Kraft, die der Regen auf das Autodach ausübt.

b) Das Wetter schlägt um. Nun treffen 60 g Hagelkörner pro Sekunde mit einer Geschwindigkeit von $v = 15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf das Autodach auf. Warum ist der entstehende Schaden größer?

Lösung:

a) Die Regentropfen werden duch den Aufprall auf das Wagendach nahezu vollständig gestoppt. Für die im Mittel wirkende Kraft gilt
$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv-0}{\Delta t} = 0,9$ N.

b) Die Hagelkörner prallen vom Autodach ab. Somit haben sie nach dem Aufprall eine Geschwindigkeit in die entgegengesetzte Richtung. Die Impulsänderung vergrößert sich bei gleichbleibender Zeit. Demnach ist die im Mittel wirkende Kraft größer. Weiterhin wirkt die von den Hagelkörnern ausgeübte Kraft punktuell, während sie sich im Fall des Regens auf eine größere Fläche verteilt.

Aufgabe 7.2 Nicht-zentraler Stoß (Präsenzaufgabe)

Eine Kugel A trifft auf eine ruhende Kugel B gleicher Masse. Kugel A wird um einen Winkel $\alpha = 10^\circ$ bezüglich der Stoßrichtung abgelenkt. Nach dem Stoß hat Kugel A eine Geschwindigkeit von $v'_A = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Die Geschwindigkeit von Kugel B beträgt $v'_B = 1,5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

a) Welchen Winkel schließen die Bewegungsrichtungen der Kugeln A und B nach dem Stoß ein?

b) Wie groß ist die Geschwindigkeit von Kugel A vor dem Stoß?

c) Bleibt die kinetische Gesamtenergie des Systems erhalten?

Lösung:

a) Der Impuls ist sowohl in x- als auch in y-Richtung erhalten. Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass sich Kugel A vor dem Stoß entlang der x-Achse bewegt. Da $m_A = m_B = M$, gilt
$0 = -v'_A \sin\alpha + v'_B \sin\beta$,
$v_A = v'_A \cos\alpha + v'_B \cos\beta$.

Aus dem ersten Zusammenhang kann β direkt berechnet werden:
$\sin\beta = \frac{v'_A \sin\alpha}{v'_B}$ =0,579

Demnach gilt $\beta = 35^\circ$ und $= \alpha + \beta = 45^\circ$.

b) Aus der Impulserhaltung in y-Richtung folgt
$v_A = v'_A \cos\alpha + v'_B \cos\beta = 6,15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

c) Die gesamte kinetische Energie vor dem Stoß beträgt $E_{kin} = \frac{1}{2} M v_A^2 = 18,9 M \ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$.
Nach dem Stoß gilt
$E'_{kin} = \frac{1}{2} M({v'_A}^2 + {v'_B}^2) = 13,6 M \ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$.

Die kinetische Energie ist somit nicht erhalten.

Aufgabe 7.3 Drehbewegung zum warm werden 1 (Präsenzaufgabe)

a) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich ein Punkt auf der Erdoberfläche des Äquators? Der Erdradius beträgt $r_E = 6370$ km.

b) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich Darmstadt? Die geographischen Koordinaten betragen (50° N, 8° O).

Lösung:

a) Für die Geschwindigkeit der Erdrotation gilt
$v = \frac{s}{t}$.
Die Erde dreht sich in 24 h einmal um sich selbst. Demnach ergibt sich
$v = \frac{2\pi r_E}{24 \text{ h}} = 1668 \ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

b) Für die Berechnung der Geschwindigkeit muss die Entfernung von Darmstadt zum Äquator, also der Breitengrad, berücksichtigt werden. Aus einfachen geometrischen Überlegungen ergibt sich die Geschwindigkeit von Darmstadt zu
$v_D = \frac{2\pi r_E}{24 \text{ h}} \cos 50° = 1072 \ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Aufgabe 7.4 Drehbewegung 1 (Präsenzaufgabe)

Das Rad eines Motorrads hat eine Drehzahl von $n_0 = 10 \ \frac{1}{\mathrm{s}}$. Der Fahrer bremst gleichmäßig, bis das Fahrzeug nach $\Delta t = 30$ s zum stehen kommt.

a) Wie viele Umdrehungen macht das Rad während des Bremsvorgangs?
Tip: Für den Drehwinkel einer gleichmäßig beschleunigten Drehbewegung gilt analog zur bereits bekannten Bewegungsgleichung der Translation $\vec{\Theta} = \frac{1}{2}\vec{\alpha} t^2 + \vec{\omega}_0 t + \vec{\Theta}_0$.

b) Das Rad habe einen Radius von $r = 30$ cm. Wie lang ist der Bremsweg?

c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Motorrads vor dem Bremsvorgang.

Lösung:

a) Die anfängliche Winkelgeschwindigkeit des Rads beträgt
$\omega_0 = 2\pi n_0$.

In einem Zeitraum von $\Delta t = 30$ s wird das Motorrad bis zum Stillstand abgebremst. Für die (negative) Winkelbeschleunigung gilt demnach
$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega}{\Delta t}$
und für den Drehwinkel
$\Theta = \frac{1}{2}\alpha \Delta t^2 = \frac{1}{2}\omega_0 \Delta t = \pi n_0 \Delta t = 942,5 \text{ rad} = 54011°$.
Dies entspricht $N = \frac{\Theta}{360°} = 150$ Umdrehungen.

(Der Abbremsvorgang von $\omega = \omega_0$ auf $\omega = 0$ mit $-\alpha$ wurde hier als Beschleunigung von $\omega = 0$ auf $\omega = \omega_0$ mit α behandelt.)

b) Der Bremsweg ergibt sich aus der Multiplikation des Radumfangs mit der Anzahl der Umdrehungen.
$s = 2\pi r N = 283$ m

c) Das Motorrad legt in $\Delta t = 1$ s die Strecke $s = 2\pi r n_0$ zurück. Die Geschwindigkeit vor dem Bremsvorgang beträgt somit
$v = \frac{s}{\Delta t} = 18{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Aufgabe 7.5 Hammer und Nagel (2 Punkte)

Ein Hammer der Masse $m = 2$ kg trifft den Kopf eines Nagels mit $v = 3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Der Stoß dauert $\Delta t = 0{,}002$ s. Berechnen Sie die im Mittel wirkende Kraft für

a) einen vollständig inelastischen Stoß.

b) einen vollständig elastischen Nagel (Hammer prallt mit v zurück).

Lösung:
Für die im Mittel wirkende Kraft gilt
$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$.

Im Fall a) kommt der Hammer nach dem Schlag zur Ruhe und es gilt
$F = \frac{mv - 0}{\Delta t} = 3000$ N.

Für den elastischen Stoß gilt
$F = \frac{mv - (-mv)}{\Delta t} = \frac{2mv}{\Delta t} = 6000$ N

Aufgabe 7.6 Nicht-zentraler Stoß im Labor- und Schwerpunktsystem (8 Punkte)

Zwei Kugeln der Massen $m_1 = 1$ kg und $m_2 = 0{,}4$ kg besitzen im Laborsystem die Anfangsgeschwindigkeiten $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2{,}8 \\ -3{,}0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ -3{,}0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

a) Berechen Sie die Geschwindigkeit des Schwerpunkts $\vec{v}_{SP}$ sowie die Relativgeschwindigkeit $\vec{v}_{rel}$ mit der die beiden Kugeln zusammen stoßen.

b) Berechnen Sie die Impulse $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_1^{SP}$ und $\vec{p}_2^{SP}$ der Kugeln vor dem Stoß im Labor- und Schwerpunktsystem.

c) Berechnen Sie die kinetische Gesamtenergie des Systems vor dem Stoß E_{kin} und E_{kin}^{SP} im Labor- und Schwerpunktsystem.

d) Der Stoß erfolgt vollkommem inelastisch. Transformieren Sie das Koordinatansystem so, dass sich Kugel 1 vor dem Stoß entlang der x-Achse bewegt und berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}_3'$ mit der sich die beiden Kugeln nach dem Stoß gemeinsam bewegen.
Transformieren Sie den Vektor $\vec{v}_3'$ anschließend zurück ins ursprüngliche Koordinatensystem.

e) Wie viel kinetische Energie geht dem System durch den inelastischen Stoß verloren?

Lösung:

a) Es gilt
$\vec{v}_{SP} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1{,}0 \\ -3{,}0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
und
$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 6{,}3 \\ 0{,}0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

b) Im Laborsystem gilt
$\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2,8 \\ -3,0 \end{pmatrix} \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$,
$\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1,4 \\ -1,2 \end{pmatrix} \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$.

Die Geschwindigkeit im Schwerpunktsystem ist
$\vec{v}_1^{SP} = \vec{v}_1 - \vec{v}_{SP} = \begin{pmatrix} 1,8 \\ 0,0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$,
$\vec{v}_2^{SP} = \vec{v}_2 - \vec{v}_{SP} = \begin{pmatrix} -4,5 \\ 0,0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

und demnach gilt für die Impulse
$\vec{p}_1^{SP} = m_1\vec{v}_1^{SP} = \begin{pmatrix} 1,8 \\ 0,0 \end{pmatrix} \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$,
$\vec{p}_2^{SP} = m_2\vec{v}_2^{SP} = \begin{pmatrix} -1,8 \\ 0,0 \end{pmatrix} \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$.

c) Im Laborsystem gilt
$E_{kin} = \frac{1}{2}m_1|\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{v}_2|^2 = 12,7\ \text{J}$

und analog im Schwerpunktsystem
$E_{kin}^{SP} = \frac{1}{2}m_1|\vec{v}_1^{SP}|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{v}_2^{SP}|^2 = 5,7\ \text{J}$.

d) Der Winkel zwischen $\vec{v}_1$ und der x-Achse sei α. Mit dem Einheitsvektor in x-Richtung $\vec{e}_x$ gilt
$\cos\alpha = \frac{\vec{v}_1\vec{e}_x}{|\vec{v}_1||\vec{e}_x|} = \frac{v_{1x}}{|\vec{v}_1|}$
und
$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{v_{1x}^2}{|\vec{v}_1|^2}} = \frac{\sqrt{v_{1y}^2}}{|\vec{v}_1|} = \frac{v_{1y}}{|\vec{v}_1|}$.
Das Koordinatensystem soll nun um den Winkel α gedreht werden. Dies hat den Vorteil, dass die y-Komponente der Geschwindigkeit von Kugel 1 verschwindet. Die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ transformieren sich wie folgt.

$$\vec{v}_1' = \begin{pmatrix} v_{1x}\cos\alpha + v_{1y}\sin\alpha \\ -v_{1x}\sin\alpha + v_{1y}\cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\begin{pmatrix} v_{1x}^2 + v_{1y}^2 \\ -v_{1x}v_{1y} + v_{1x}v_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{v}_1| \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2' = \begin{pmatrix} v_{2x}\cos\alpha + v_{2y}\sin\alpha \\ -v_{2x}\sin\alpha + v_{2y}\cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\begin{pmatrix} v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} \\ -v_{2x}v_{1y} + v_{2y}v_{1x} \end{pmatrix}$$

Der Impuls ist in beiden Komponenten erhalten. Der Endimpuls des Systems sei $\vec{p}_3'$.
Für die x-Komponente gilt
$p_{1x}' + p_{2x}' = p_{3x}'$
$m_1v_{1x}' + m_2v_{2x}' = (m_1+m_2)\,v_{3x}'$
$v_{3x}' = \frac{m_1|\vec{v}_1| + \frac{m_2}{|\vec{v}_1|}(v_{2x}v_{1x}+v_{2y}v_{1y})}{m_1+m_2} = 2,9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Für die y-Komponente gilt
$p_{1y}' + p_{2y}' = p_{3y}'$
$p_{2y}' = p_{3y}'$
$m_2v_{2y}' = (m_1+m_2)\,v_{3y}'$
$v_{3y}' = \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{-v_{2x}v_{1y}+v_{2y}v_{1x}}{|\vec{v}_1|} = -1,3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Und somit $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2,9 \\ -1,3 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, beziehungsweise $|\vec{v}_3'| = 3,2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Rücktransformiert ergibt sich $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} v_{3x}'\cos\alpha - v_{3y}'\sin\alpha \\ v_{3x}'\sin\alpha + v_{3y}'\cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\begin{pmatrix} v_{3x}'v_{1x} - v_{3y}'v_{1y} \\ v_{3x}'v_{1y} + v_{3y}'v_{1x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Dies entspricht wie erwartet $\vec{v}_{SP}$ aus Aufgabenteil a).

e) Die kinetische Energie nach dem Stoß beträgt
$E'_{kin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)|\vec{v}_3''|^2 = 7,2$ J.
Die kinetische Energie vor dem Stoß wurde bereits zu $E_{kin} = 12,7$ J bestimmt.
Durch den Stoß gehen also $\Delta E_{kin} = 5$ J verloren.

Aufgabe 7.7 Drehbewegung zum warm werden 2 (2 Punkte)

Der Minutenzeiger einer Uhr hat die Geschwindigkeit $v = 1,5\ \frac{\text{mm}}{\text{s}}$. Wie lang ist der Zeiger.

Lösung:
Für die Geschwindigkeit gilt
$v = \frac{s}{t}$.

Für eine volle Umdrehung $s = 2\pi r$ benötigt der Zeiger $t = 1$ h.

Demnach beträgt die Länge des Zeigers
$r = \frac{\Delta t v}{2\pi} = 859$ mm.

Aufgabe 7.8 Drehbewegung 2 (4 Punkte)

Ein Rad dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 4\ \frac{1}{\text{s}}$ und wird dann für $\Delta t = 5$ s mit einer Winkelbeschleunigung $\alpha = 2\ \frac{1}{\text{s}^2}$ beschleunigt.

a) Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit nach dem Beschleunigugsvorgang.

b) Wie viele Umdrehungen hat das Rad während des Beschleunigungsvorgangs durchgeführt?

Lösung:

a) Die Winkelgeschwindigkeit berechnet sich zu
$\omega = \alpha\Delta t + \omega_0 = 14\ \frac{1}{\text{s}}$

b) Für den Drehwinkel gilt
$\Theta = \frac{1}{2}\alpha\Delta t^2 + \omega_0 t = 45\ \text{rad} = 2578°$
Dies entspricht ca 7 Umdrehungen.