Lösungsblatt 6
zur Experimentalphysik I

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1 Wichtige Hinweise (Präsenzaufgabe)

Ich habe für Sie einmal die Namen, E-Mail-Adressen sowie Zeit und Ort der Übungs- und Sprechstunden aller Tutoren zusammengetragen. Sie können gerne auch in die Sprechstunden eines anderen Tutors oder mehrerer Tutoren gehen, falls Sie das möchten. Nutzen Sie die Sprechstunden auch, wenn Sie Fragen oder Probleme mit den Übungen haben.

Tutor	E-Mail	Übung	Raum	Sprechstd.	Raum
Daniel Kiefer	d.kiefer ät stud.tu-darmstadt.de	Mo 13:30	S1 05/23	Mi 15:20	LBS Lernzentrum
Maximilian Schilder	maximilian.schilder@stud.tu-d...	Mo 15:20	S1 02/330	Mi 13:40	LZP
Martin Baumann	mbaumann ät ikp.tu-darmstadt.de	Di 11:40	S1 03/107	Do 13:00	S2 14/420
Alex Bruns	alxbruns ät gmail.com	Di 11:40	S3 13/334	Mi 13:30	LZP

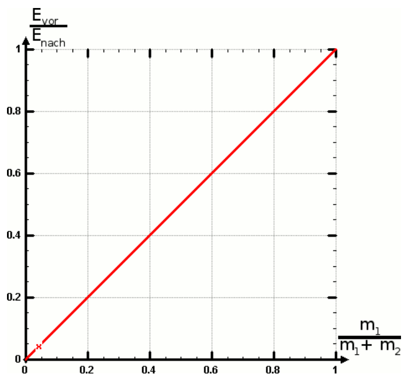
Für die Aufgabe “Majoras Mask II” bekommen Sie eine zusätzliche Woche, d.h. der Abgabetermin für diese Aufgabe ist erst mit diesem Blatt. Sie können aber Ihre Lösung gerne schon früher abgeben.

Da es immer noch Verwechslungen zwischen Präsenz- und Hausübungen gab, sind die Präsenzübungen jetzt grün markiert, während die Hausübungen rot unterlegt sind.

Aufgabe 6.2 Inelastischer Stoß (Präsenzaufgabe)

Zwei Massen mit den phantasievollen Namen m_1 und m_2 stoßen völlig inelastisch zusammen. m_2 sei vor dem Stoß in Ruhe.

a) Zeichnen Sie ein Diagramm, in welchem Sie das Verhältnis der Bewegungsenergie nach und vor dem Stoß gegen $\frac{m_1}{m_1+m_2}$ auftragen.



Aus der Impulserhaltung folgt unmittelbar die Geschwindigkeit nach dem Stoß: $m_1 v_{\text{vor}} = (m_1 + m_2)\, v_{\text{nach}} \iff v_{\text{nach}} = v_{\text{vor}} \cdot \frac{m_1}{m_1+m_2}$
Damit ergibt sich für das Verhältnis der kinetischen Energien:

$$\frac{E_{\text{nach}}}{E_{\text{vor}}} = \frac{\frac{1}{2}(m_1+m_2)\, {v_{\text{nach}}}^2}{\frac{1}{2} m_1 {v_{\text{vor}}}^2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}$$

b) Diskutieren Sie die wesentlichen Merkmale des Diagramms.

Hier bleibt fest zu stellen, dass die kinetische Energie nach dem Stoß (= kinetische Energie des Schwerpunktes) linear mit dem Verhältnis der stoßenden Masse zur Gesamtmasse anwächst. Ist die stoßende Masse klein im Verhältniszur Gesamtmasse, wird fast die gesamte kinetische Energie bei dem Stoß umgewandelt. Bei vernachlässigbar keiner Masse M_2 steckt fast die gesamte kinetische Energie in der Bewegung des Schwerpunkts selbst.

c) Wo ist die restliche Energie nach dem Stoß? Machen Sie sich dabei die Voraussetzungen für einen inelastischen Stoß klar.

Die restliche Energie wird in Wärme umgewandelt, oder allgemeiner in innere Energie der Stoßpartner. Voraussetzung dafür ist, dass mindestens ein Stoßpartner in der Lade ist die entsprechende Menge an innerer Energie aufzunehmen, was insbesondere in der Quantenmechanik nicht immer der Fall ist.

Name, Vorname: ______________________ Matrikelnummer: ⊔⊔⊔⊔⊔⊔⊔

d) Nennen Sie, unter Berücksichtigung Ihrer Erkenntnisse aus der letzten Aufgabe, je zwei Beispiele für einen vollständig inelastischen und einen vollständig elastischen Stoß.

Als Beispiel für einen vollständig elastischen Stoß kann die Streuung zweier Elektronen genommen werden. Diese sind nach heutigem Wissen Punktteilchen und können nicht angeregt werden.
Ein anderes Beispiel ist der Zusammenstoß zweier Atomkerne unterhalb des niedrigsten Anregungsniveaus. Auch hier ist wegen der Quantenmechanik keiner der beiden Stoßpartner in der Lage Energie auf zu nehmen.

Als Beispiel für einen vollständig inelastischen Stoß können zwei Autos dienen, die sich bei einem Unfall ineinander verkeilen.
Ein anderes Beispiel, dass so etwas auch in der Quantenwelt möglich ist, zeigt die 3α-Reaktion in der Sonne. Hier stoßen drei α-Teilchen zusammen und formieren sich zu einem angeregten $^{12}\mathrm{C}^*$-Kern. Hierfür müssen allerdings die Energien so gewählt sein, dass deren Summe der Energie des $^{12}\mathrm{C}^*$-Kerns entspricht.

Aufgabe 6.3 Der SV Darmstadt steigt auf in die 2. Liga. (Präsenzaufgabe)

Bei den Aufstiegs-Feiern des SV Darmstadt 98 wurden Silvesterraketen mit einer Gesamtmasse von 250 g gezündet. Davon waren 200 g Treibmittel. Die Raketen wurden senkrecht zur Erdoberfläche aufgestellt und behielten diese Richtung während ihres Fluges bei. Die Fallbeschleunigung g war konstant angenommen; der Luftwiderstand vernachlässigbar. Die Verbrennung des Schwarzpulvers lief gleichmäßig ab, d.h. die ausgestoßene Masse pro Zeit μ war konstant und deren Geschwindigkeit relativ zur Rakete $u = 300\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ebenfalls. Nach $t_B = 0{,}5$ s explodierten die Raketen unter Aussendung blauer Sternschnuppen.
Welche Höhe h und welche Steiggeschwindigkeit v hatten die Rakete zu diesem Zeitpunkt erreicht?

Hier gilt $M(t) = M_0 - \mu t$ und $M(t)\cdot a = -u\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} - M\cdot g \quad\Rightarrow\quad a = -\frac{u}{M}\cdot\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} - g = \frac{\mu u}{M_0-\mu t} - g$

$$v(t) = \int a\,\mathrm{d}t = v_0 - gt + u\cdot\ln\left(\frac{M_0}{M_0 - M_{\mathrm{treib}}}\right) = 0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}5\ \mathrm{s} + 300\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\ln\left(\frac{250\ \mathrm{g}}{250\ \mathrm{g} - 200\ \mathrm{g}}\right) = 477{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$h = \int v\mathrm{d}t = \int v_0 - gt + u\ln\left(\frac{M_0}{M_0-\mu t}\right)\mathrm{d}t = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 - \int \ln\left(\frac{M_0-\mu t}{M_0}\right)\mathrm{d}t = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{uM_0}{\mu}\int\ln(x)\mathrm{d}x$$

$$= v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{uM_0}{\mu}(C - 1 - x(\ln(x)-1)) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{uM_0}{\mu}(x\ln(x) - x + 1) \quad \text{mit } x = \frac{M_0-\mu t}{M_0} = 0{,}2$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot(0{,}5\ \mathrm{s})^2 + \frac{300\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 250\ \mathrm{g}}{\frac{200\ \mathrm{g}}{0{,}5\ \mathrm{s}}}(0{,}2\cdot\ln(0{,}2) - 0{,}2 + 1) = -1{,}25\ \mathrm{m} + 89{,}65\ \mathrm{m} = 88{,}40\ \mathrm{m}$$

Aufgabe 6.4 Max und Moritz erforschen die Atmosphäre (5 Punkte)

Max und Moritz haben genug von ihrer Kartoffelkanone und wollen sich jetzt auf den Bau von Raketen spezialisieren und die Atmosphäre erforschen. Der Luftwiderstand kann vernachlässigt werden, die Erdanziehung jedoch nicht. Die Nutzlast, ein Raspberry Pi mitsamt Messgeräten und Fallschirm, wiegt 100 g. Zur Diskussion stehen verschiedene Antriebssätze:

a) Das Modell “Wasserrakete” mit einem Druckgas-Antrieb. Vorteil hier sind die geringen Kosten und das geringe Gewicht der Tanks und der Rakete von 400 g. Nachteil ist die geringe Austrittsgeschwindigkeit von 45 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Die Treibladung beträgt 2 kg.

b) Max hat die Idee, das Wasser durch Quecksilber (Dichte: 13,55 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$; Umweltverschmutzung: saumäßig) zu ersetzen. Wegen der höheren Dichte ist die Austrittsgeschwindigkeit um einen Faktor $\sqrt{13{,}55}$ geringer.

c) Eine Alternative dazu ist der "klassische" Antrieb mit Schwarzpulver. Dieses hat eine Austrittsgeschwindigkeit von 500 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Dafür muss die Rakete aber stabiler gebaut sein und wiegt 900 g. Die Treibladung beträgt ebenfalls 900 g.

d) Das Premiummodell "Wasserstoff" bezieht seine Energie aus der Verbrennung von Wasserstoff und Sauerstoff. Dieser Antrieb ist teurer und komplizierter, da Druckbehälter und Ventile zur Mischung erforderlich sind. Daher wiegt die Rakete auch stolze 2,9 kg. Als Treibladung können maximal 30 g Wasserstoff und 240 g flüssiger Sauerstoff mit genommen werden. Die Austrittsgeschwindigkeit der Gase beträgt 5635 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Welche Flughöhe kann man mit den vier Raketen erzielen, wenn man das Pi am Scheitelpunkt der Flugbahn (nicht wenn die Rakete leer ist) auskoppelt? Nehmen Sie an, dass alle Rakete eine Sekunde lang laufen.

Die Gesamthöhe ist die Steighöhe aus der Raketengleichung der letzten Aufgabe plus die Höhe, die die Rakete im freien Fall steigt. Letztere lässt sich mit dem Energieerhaltungssatz ermitteln, da die Geschwindigkeit am Ende der Steighöhe ebenfalls aus der letzten Aufgabe bekannt ist: $E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgh_{\text{fall}} \Leftrightarrow h_{\text{fall}} = \frac{v^2}{2g}$ Daraus lässt sich mit den Anfangsbedingungen $h_0 = 0$ und $v_0 = 0$ folgende Formel ableiten:

$$h_{\text{ges}} = h_{\text{steig}} + h_{\text{fall}} = -\frac{1}{2}gt^2 + u\frac{M_0}{\mu}(x\ln(x) - x + 1) + \frac{(u\ln(x) + gt)^2}{2g}$$

Mit dieser Gleichung ergibt sich für die verschiedenen Raketenantriebe folgende Tabelle: $\frac{a_0}{g}$ gibt an, die wie viel fache Erdbeschleunigung der Raketenmotor am Start vollbringen kann. Wäre dieser Wert kleiner 1, würde die Rakete am Anfang gar nicht abheben.

Modell	m	m_{treib}	u	t	M_0	$\frac{a_0}{g}$	x	h_{steig}	h
Wasserrakete	0,5 kg	2,00 kg	45 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	1 s	2,50 kg	3,60	0,20	21,894 m	216,74 m
Quecksilber	0,5 kg	27,10 kg	12 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	1 s	27,60 kg	1,20	0,02	6,320 m	82,50 m
Schwarzpulver	1,0 kg	0,90 kg	500 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	1 s	1,90 kg	23,68	0,53	138,415 m	4972,19 m
Wasserstoff	3,0 kg	0,27 kg	5635 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	1 s	3,27 kg	46,53	0,92	234,319 m	11544,62 m

Aufgabe 6.5 Willys Abenteuer im Weltraum (4 Punkte)

Das Alien Willy sitzt aufgrund eines defekten Transistors D44H8 an der Antriebssteuerung in Ruhe im Weltraum fest. Zum Glück sind es bis zur nächsten Weltraumbushaltestelle nur schlappe 1 000 000 km. Willy hat zwei Optionen dorthin zu gelangen. Wie schnell ist welche Option?

a) Willy hat eine Dreistufige Not-Rakete. Die Geschwindigkeit der ausgestoßenen Gase sei $u = 4 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Die Anfangsmasse m_0 beträgt $3 \cdot 10^6$ kg. Im Tank der ersten Stufe (dieser wiegt 10^5 kg) sind $2 \cdot 10^6$ kg Treibstoff enthalten. Nach Verbrennung der zweiten Stufe beträgt die Raketenmasse $2 \cdot 10^5$ kg. Danach wird auch dieser Tank ($2 \cdot 10^4$ kg) weggesprengt und die dritte Stufe gezündet. Nachdem diese Abgebrannt ist, wiegt die Rakete noch $2{,}5 \cdot 10^4$ kg. Das Absprengen der Tanks soll keinen Einfluss haben.

Da hier keine Gravitation herrscht, lässt sich mit der Raketenformel aus dem Script folgende Tabelle aufstellen:

	M_i	m_{treib}	M_f	v_i	v_f
Stufe 1	$3 \cdot 10^6$ kg	$1 \cdot 10^6$ kg	$1 \cdot 10^6$ kg	0 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$	4,394 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$
Stufe 2	$9 \cdot 10^5$ kg	$2 \cdot 10^5$ kg	$2 \cdot 10^5$ kg	4,394 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$	10,41 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$
Stufe 3	$1{,}8 \cdot 10^5$ kg	$2{,}5 \cdot 10^4$ kg	$2{,}5 \cdot 10^4$ kg	10,41 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$	18,31 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$
Summe		**$2{,}855 \cdot 10^6$ kg**			

b) Willy könnte die gleiche Menge Treibstoff in eine Einstufige Rakete füllen. Dafür kann er $4{,}5 \cdot 10^4$ kg an Gewicht bei den Tanks sparen.

Willy benötigt also $t = \frac{1\,000\,000\ \mathrm{km}}{18{,}31\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}} = 15$ Stunden und 10 Minuten bis zur Weltraumbushaltestelle.

$$v_f = v_i + u \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) = \ln\left(\frac{m_i}{m_i - m_{\mathrm{treib}}}\right) = \ln\left(\frac{2{,}955 \cdot 10^6 \mathrm{kg}}{2{,}955 \cdot 10^6 \mathrm{kg} - 2{,}855 \cdot 10^6 \mathrm{kg}}\right) = 13{,}54\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Damit benötigt er 20 Stunden und 31 Minuten, weshalb die erste Variante schneller ist, obwohl die Rakete im Verhältnis mehr unbrennbare Masse besitzt.

Aufgabe 6.6 Affenschuss (4 Punkte)

Sie erinnern sich sicherlich noch an das Experiment "Affenschuss". Wie im Experiment gezeigt, lässt sich der (Stoff-)Affe ($m_{\mathrm{Affe}} = 2$ kg) senkrecht vom Baum fallen und wird in 10 m Höhe von einer Kugel ($v_{\mathrm{Kugel,\ horizontal}} = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $m_{\mathrm{Kugel}} = 100$ g) getroffen, die zeitgleich abgefeuert wurde. Der Affe fängt die Kugel auf und stoppt sie innerhalb einer Armlänge von 20 cm. Die Geschwindigkeit des Affen zum Zeitpunkt als er die Kugel fängt beträgt 4 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Die Zeit, welche die Kugel benötigt, um anzuhalten ist vernachlässigbar.

a) Wie weit entfernt von seinem ursprünglichen Landeplatz kommt der Affe auf?

Hierbei handelt es sich um einen vollkommen inelastischen Stoß. Die Geschwindigkeit des Affen nach dem Stoß ergibt sich mit der Formel aus Aufgabe 6.2.a). Multipliziert mit der Fallzeit erhält man folgende Abweichung vom ursprünglichen Landeort:

$$s = v \cdot t = v_{\mathrm{Kugel}} \frac{m_{\mathrm{Kugel}}}{m_{\mathrm{Affe}} + m_{\mathrm{Kugel}}} \cdot \frac{v_0}{g} \cdot \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2gs}{{v_0}^2}}\right) =$$

$$20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \frac{0{,}1\ \mathrm{kg}}{2\ \mathrm{kg} + 0{,}1\ \mathrm{kg}} \cdot \frac{4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \cdot \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 10\ \mathrm{m}}{\left(4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}}\right) = 1{,}019\ \mathrm{m}$$

b) Welche Beschleunigung erfährt die Kugel?

$$s = \frac{1}{2} a t^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{v^2}{2s} = \frac{20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2 \cdot 0{,}2\ \mathrm{m}} = 1000\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 100g$$

c) Wiederholen Sie die Aufgaben a) und b) unter der Annahme, dass Sie dieses Experiment persönlich durchführen. Wählen Sie dazu geeignete Zahlen.

Mit der Annahme $M_{\mathrm{Mensch}} = 65$ kg und einer Armlänge (bzw. der Länge, in der man wirklich Kraft ausüben kann) von 50 cm ergibt sich mit der gleichen Formel wie oben $s = 3{,}286$ cm und $a = 400\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 40g$.

Aufgabe 6.7 Kleinkaliber (5 Punkte)

Markus bindet in seinem Schützenverein einen Holzklotz mit einer Masse m_H von 1 kg an einen 1 m langen Faden. Mit einem Kleinkaliber (Geschossmasse $m_G = 10$ g; Mündungsgeschwindigkeit 300 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$) schießt er aus einer Entfernung von 10 m auf den Holzklotz. Der Holzklotz wird durchschossen und um einen Winkel α von 13° ausgelenkt. (Die Massenänderungen und die in Wärme umgewandelte Energie seien vernachlässigbar klein)

a) Wie schnell ist der Holzklotz direkt nachdem er getroffen wurde?

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}} \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1-\cos(\alpha)} = \sqrt{2 \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\ \text{m} \cdot (1-\cos(13°))} = 0{,}7160\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Wie schnell ist Markus' Geschoss direkt nach dem Holzklotz?

$$P_{\text{Kugel, vorher}} = P_{\text{Holzklotz}} + P_{\text{Kugel, nachher}} \quad \Leftrightarrow \quad v_{KN} = v_K - \frac{m_H}{m_K} V_H = 300\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{1\ \text{kg}}{0{,}01\ \text{kg}} \cdot 0{,}716\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 228{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) Welcher Auslenkungswinkel β hätte sich für den Holzklotz ergeben, wenn die Kugel stecken geblieben wäre?

$$v^2 = 2gl(1-\cos(\alpha)) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arccos\left(1 - \frac{v^2}{2gl}\right) = \arccos\left(1 - \frac{1}{2gl} \cdot \left(\frac{v_K}{1+\frac{m_H}{m_K}}\right)^2\right) =$$

$$\arccos\left(1 - \frac{1}{2 \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\ \text{m}} \cdot \left(\frac{300\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1+\frac{1\ \text{kg}}{0{,}01\ \text{kg}}}\right)^2\right) = 56{,}02°$$